



Michał FIGIEL¹

Przegląd i interpretacja błędów w wyznaczaniu parametrów fraktalnych przestrzeni porowej w oparciu o komputerową analizę obrazu

Streszczenie: Rachunek fraktalny jest jedną z szybko rozwijających się dziedzin matematyki i znajduje zastosowanie między innymi w opisie struktur porowych. Stanowi nowe spojrzenie na ich nieregularność i chaotyczność. Aby mógł być stosowany poprawnie, powinien być wspomagany analizą błędów. W artykule przedstawiono i zweryfikowano niedoskonałości związane z analizą obrazu oraz możliwe sposoby ich korekcji.

Jednym z kluczowych aspektów podczas takich badań jest miejsce oraz ilość wykonanych zdjęć. Sfotografowano powiększony obraz gruboziarnistego piaskowca w płycie cienkiej, uzyskany przy użyciu lupy binokularnej. Następnie wykonane zdjęcia zostały połączone w jedno. Otrzymane rozkłady parametrów fraktalnych pokazują ich zmienność oraz potwierdzają, że poprawnie wykonana seria zdjęć struktury porowej powinna zawierać zarówno obszary bardziej, jak i mniej porowate, a ich ilość należy dostosować do próbek.

Zbadano wpływ rozdzielczości zdjęcia na wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności. Wykorzystano zdjęcia wapienia wykonane w SEM z użyciem elektronów wstecznie rozproszonych w zakresie powiększeń 120–2000×. Dodatkowo badaniu poddany został pojedynczy por. Otrzymane wyniki wskazują, że dla dużego zakresu powiększeń wartości wymiaru fraktalnego są zbliżone, natomiast lakunarność każdorazowo się zmienia. Jest to związane ze zmieniającą się jednorodnością zdjęcia.

Analizie poddana została również metodyka wyznaczania rozkładu przestrzennego parametrów fraktalnych w oparciu o binaryzację. Stosowane metody zakładają, że binaryzacja następuje przed lub po podziale zdjęcia na mniejsze prostokąty, z których wyznaczane są wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności. Indywidualna binaryzacja, pomimo czasochłonności, zapewnia lepsze wyniki, które są bardziej zbliżone do rzeczywistości.

Nie jest możliwe zdefiniowanie jednej, słusznej metodyki do eliminowania błędów. Przedstawiono zbiór wskazówek, które mogą posłużyć do udoskonalenia wyników w przyszłej analizie obrazu struktur porowych.

Słowa kluczowe: wymiar fraktalny, lakunarność, analiza obrazu, przestrzeń porowa, analiza błędów

¹ Student, AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Wydział Wiertnictwa, Nafty i Gazu, Kraków;
e-mail: mich.figiel@gmail.com

Overview and error interpretation of estimating fractal parameters of pore space based on computer image analysis

Abstract: Fractal analysis is one of the rapidly evolving branches of mathematics and finds its application in different analyses such as pore space description. It constitutes a new approach to the issue of their natural irregularity and roughness. To be properly applied, it should be encompassed by an error estimation. The article presents and verifies uncertainties along with imperfections connected with image analysis and expands on the possible ways of their correction.

One of key aspects of such research is finding both appropriate place and the number of photos to take. A coarse-grained sandstone thin section was photographed and then pictures were combined into one, bigger image. Fractal parameters distributions show their change and suggest that the accurately gathered group of photos include both highly and less porous regions. Their amount should be representative and adequate to the sample. The resolution influence on the fractal dimension and lacunarity values was examined. For SEM limestone images obtained using backscattered electrons, magnification in the range of 120x to 2000x was used. Additionally, a single pore was examined. The acquired results point to the fact that the values of fractal dimension are similar to a wide range of magnifications, while lacunarity changes each time. This is connected with changing homogeneity of the image.

The article also undertakes a problem of determining fractal parameters spatial distribution based on binarization. The available methods assume that it is carried out after or before the image division into rectangles to create fractal dimension and lacunarity values for interpolation. An individual binarization, although time consuming, provides better results that resemble reality to a closer degree.

It is not possible to define a single, correct methodology of error elimination. A set of hints has been presented that can improve results of further image analysis of pore space.

Keywords: fractal dimension, lacunarity, image analysis, pore-space, error estimation

Wprowadzenie

Analiza błędów pomiarowych jest zagadnieniem niezwykle istotnym podczas każdych badań. Umożliwia zarówno weryfikację danych, jak również informuje o ich dokładności. Rachunek fraktalny jest szybko rozwijającą się dziedziną nauki, a wiele procesów występujących naturalnie w przyrodzie przybiera formę fraktali i może być opisane za ich pomocą. Obrazuje nowe podejście do opisu przestrzeni porowej, jednak tak samo jak inne sposoby wymaga walidacji (Such 2000). W literaturze nie ma wystarczającego rozwinięcia tego zagadnienia, jakie ma miejsce np. w badaniach petrofizycznych (Such i in. 2007). W artykule przedstawiono wyniki analizy obrazu płytek cienkich piaskowca gruboziarnistego oraz wapienia organodetrytycznego na podstawie zdjęć wykonanych w pierwszym wypadku lupą binokularną oraz w drugim – uzyskanych w skaningowym mikroskopie elektronowym. Przedstawione rozważania mogą być prowadzone również na skałach o innej litologii, jak i dowolnych ciałach porowatych. Ponadto posłużyć mogą jako wskazówki do dalszych analiz.

1. Tło teoretyczne

Termin „fraktal”, wywodzący się z łacińskiego słowa *fractus* oznaczającego „złamany, ułamkowy”, wprowadził po raz pierwszy w drugiej połowie XX wieku francuski matema-

tyk Benoit Mandelbrot. Fraktale początkowo traktowane były tylko w aspekcie ciekawych teoretycznych rozważań. Z biegiem czasu zyskały praktyczne zastosowanie w opisie nieregularnych struktur, gdzie geometria euklidesowa okazywała się niewystarczająco oddawać rzeczywistość (Mandelbrot 1977). Do podstawowych cech, które charakteryzują fraktale zaliczyć można:

- opis za pomocą zazwyczaj prostej zależności rekurencyjnej, a nie konkretnego wzoru matematycznego,
- samopodobieństwo manifestujące się w sposób jawny lub stochastyczny – fraktale wyglądają podobnie niezależnie od skali,
- ich wymiar nie jest liczbą całkowitą.

Jednym z parametrów charakteryzujących fraktal jest **wymiar fraktalny**. Ogólnie stwierdzić można, że jest to liczba reprezentująca stopień nieregularności i chaotyczności danej struktury (Wang i in. 2012). Ze względu na pewną dowolność w interpretacji tego terminu oraz brak matematycznej precyzji w jego określaniu, powstało wiele definicji wymiaru fraktalnego, używanych wymiennie przez badaczy. Dodatkowo nadmienić należy, że wyznaczone wartości liczbowe na podstawie różnych metod zazwyczaj nie dają tych samych wyników. Dlatego istotne jest, aby każdorazowo zaznaczyć, jaka definicja stosowana jest w analizie.

Wymiar pudełkowy (eng. *box-counting dimension*), inaczej nazywany wymiarem Minkowskiego, jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych wymiarów fraktalnych (Leśniak 1999). Polega on na zliczaniu tzw. pudełek, którymi pokrywana jest struktura. Może być wyznaczony dla obiektów dwu-, jak i trójwymiarowych. Jeżeli przez N oznaczona zostanie ilość pudełek o boku ε , które zawierają badany fraktal, to korzystając z definicji granicy (zakładając nieskończenie małe ε) wymiar fraktalny D wynosi:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad (1)$$

W praktyce wymiar ten wyznaczany jest poprzez wykonanie wykresu $\log\text{-}\log N$ od ε dla poszczególnych wielkości siatki i następnie wykreślenie krzywej regresji dla otrzymanych danych. Linia prosta stanowi kryterium fraktalności, a jej współczynnik kierunkowy jest zarazem poszukiwanym wymiarem fraktalnym.

Ponieważ możliwe jest, że dwa fraktale mają ten sam wymiar, wprowadzony został dodatkowy parametr – **lakunarność**. Określa on rozmieszczenie dziur (porów), a ponadto charakteryzuje fraktal ze względu na jego obrót. Im struktura jest bardziej jednorodna, tym wartości lakunarności są mniejsze (Plotnick 2017). Matematycznie lakunarność Λ obiektów dwuwymiarowych wyznaczana jest poprzez nałożenie na fraktal regularnej siatki, a następnie na podstawie zależności:

$$\Lambda_{\varepsilon,g} = \left(\frac{\sigma_{\varepsilon,g}}{\mu_{\varepsilon,g}} \right)^2 \quad (2)$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym średniej ilości pikseli μ w elemencie siatki o boku ε dla ułożenia g . Kolejny proces jest powtarzany obracając strukturę ($g = 1, 2, 3, 4$). Lakunarność całego zdjęcia jest wyznaczana jako średnia wartość lakunarności dla poszczególnych ułożeń.

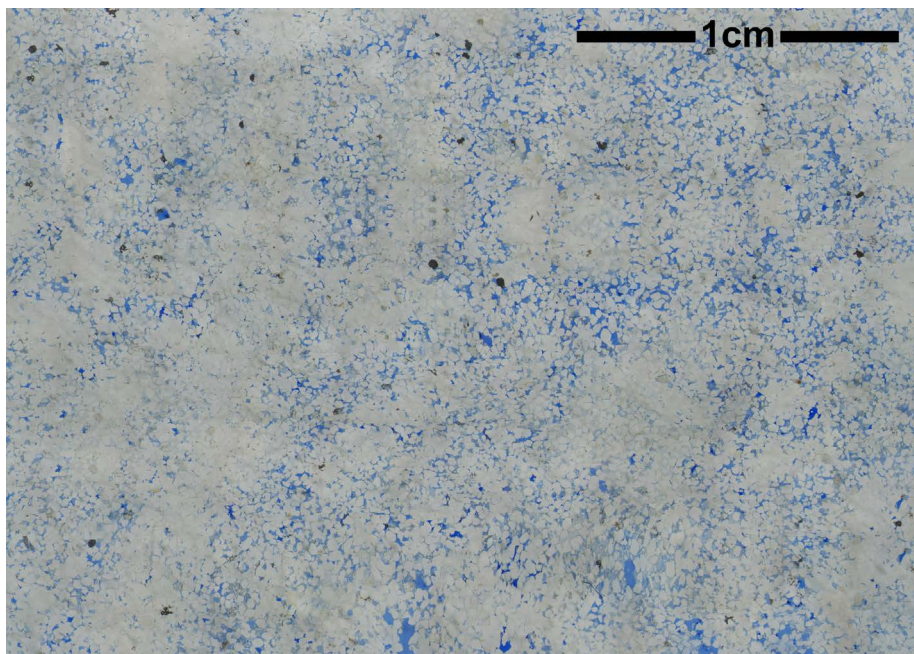
Wyznaczanie wymiaru fraktalnego i lakunarności porów skalnych przedstawionych na zdjęciach dwukolorowych (tj. zazwyczaj czarne i białe piksele) jest prostsze niż w przypadku występowania większej ilości odcieni. Dlatego często stosuje się binaryzację zdjęć. W tym celu wykorzystane są odpowiednie algorytmy lub proces przeprowadzany jest manualnie (Nayak i Mishra 2016). W pierwszym wypadku możliwa jest większa unifikacja metodyki dla szeregu zdjęć. Z drugiej jednak strony ręczne zaznaczanie przestrzeni porowej, pomimo znacznej subiektywności i wpływu doświadczenia badacza na rezultat, pozwala na otrzymanie dokładniejszych wyników. Jest to jednak proces żmudny i długotrwały.

2. Dobór miejsca oraz ilości zdjęć

Dobór odpowiedniego fragmentu przestrzeni porowej w celu wykonania fotografii do dalszej analizy obrazu jest zagadnieniem tak samo istotnym, co przysparzającym trudności. W celu dokładnego przedstawienia tej problematyki, sfotografowano płytkę cienką impregnowanego niebieską żywicą, kwarcowego, gruboziarnistego piaskowca jurajskiego z południowo-wschodniej części Nizy Polskiego. Składa się głównie z kwarcu, podrzędnie z tlenku żelaza i mik. Spoiwo stanowi różnie wykształcony cement węglanowy.

W celu wyznaczenia porowatości, wykonano pomiary porozymetrii rtęciowej na 5 fragmentach piaskowca z różnych części rdzenia. Badania uzupełniono metodą nasycień, ważąc suchą oraz nasyconą wodą próbkę piaskowca. Dodatkowo przeprowadzono analizę obrazu, dokonując binaryzacji zdjęć płytki cienkiej, w których pory oznaczone zostały kolorem białym, a szkielet czarnym. Wyznaczona w ten sposób porowatość odkryta obliczona została jako stosunek ilości pikseli białych do wszystkich pikseli. Wykonane przez autora pomiary wykazały, że porowatość analizowanej próbki skalnej wynosi około 15%. Stosunkowo wysoka porowatość oraz niska zawartość mikroporów potwierdzają, że badany piaskowiec jest odpowiedni do analizy zmienności przestrzeni porowej w zakresie makroporów większych niż 10 μm .

Wykonano 87 zdjęć o rozdzielczości 3264×2448 pikseli przy użyciu lupy binokularnej o czterokrotnym powiększeniu w taki sposób, aby nachodziły na siebie i możliwe było ich połączenie w jeden, duży obraz o rozdzielczości 24332×17219 pikseli (rys. 1). Ze względu na niedoskonałość aparatu konieczne było zastosowanie technik komputerowej obróbki obrazu w celu nieznacznej korekcji niektórych zdjęć oraz ich połączenia w jedno. Następnie uzyskany obraz podzielony został na 144 równe prostokąty, dla których po binaryzacji wyznaczone zostały: porowatość (ϕ) (jako stosunek białych pikseli do wszystkich pikseli), wymiar fraktalny (D) oraz lakunarność (Λ). W celu wyznaczenia parametrów fraktalnych zastosowano rozszerzenie FracLac programu ImageJ, wykorzystujące uprzednio omawiany algorytm *box-counting*.



Rys. 1. Przestrzeń porowa płytki cienkiej piaskowca. Kolor jasnoszary odpowiada matrycy skalnej piaskowca. Obraz spod lupy binokularnej

Fig. 1. Sandstone thin section pore space seen through the stereo microscope. Light gray corresponds with the sandstone matrix

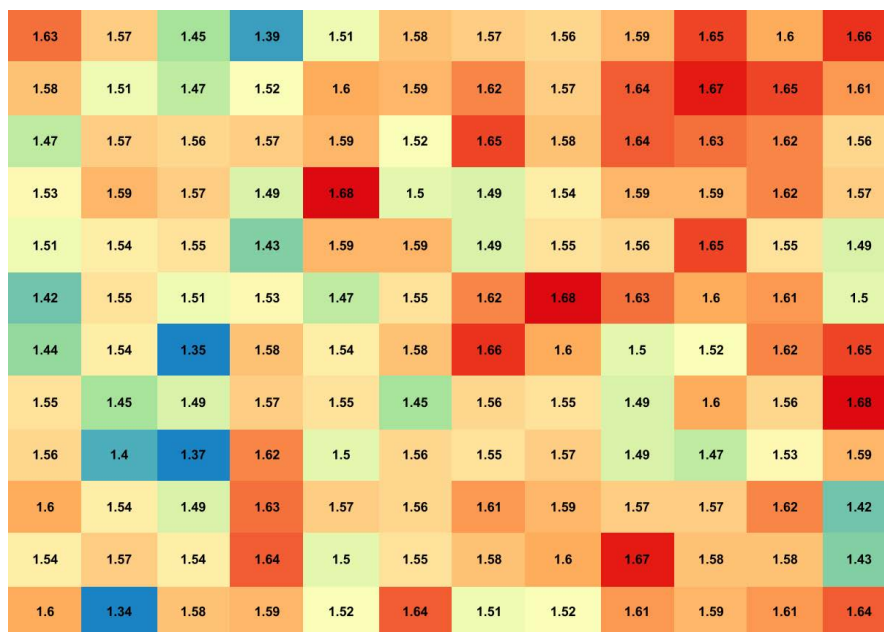
Analizując rozkład poszczególnych parametrów (rys. 2–4) dostrzegalna jest ich zmienność w obrębie całej płytki cienkiej. Średnie wartości wynoszą: porowatość 15,38% ($\sigma = 5,05$), wymiar fraktalny 1,56 ($\sigma = 0,07$) oraz lakunarność 0,87 ($\sigma = 0,26$), gdzie σ – odchylenie standardowe. Dla całego zdjęcia: $\phi = 15,94\%$, $D = 1,80$, $\Lambda = 0,33$.

Oczywistym, nasuwającym się wnioskiem jest stwierdzenie, że zbyt mała liczba zdjęć nie odzwierciedla poprawnie badanej przestrzeni porowej. Analizując zbyt małą ich liczbę, popełniony może zostać błąd nieadekwatności doboru próby do badanego zbioru. Dodatkowo zdjęcia wykonane na brzegu próbki zawierały zniekształcenia i musiały zostać wyeliminowane. Naturalne pytanie, jakie można w takim wypadku zadać brzmi: jaka ilość i jakie rozmieszczenie zdjęć jest poprawne? Niestety jest to kwestia sporna, a różni badacze przyjmują odmienne wartości (Liu i Ostadhassan 2017). Z pewnością można jednak stwierdzić, że większa ich ilość, a nawet pokrycie zdjęciami całej powierzchni szlifów jest lepsze. Z drugiej jednak strony pociąga to za sobą znaczną żmudność i czasochłonność badań. Każdorazowo konieczne jest znalezienie kompromisu pomiędzy ilością fotografii a czasem badania. Duża ilość zdjęć, obejmująca rozległy obszar struktury porowej, będzie zawierała zarówno obszary mniej i bardziej porowate, rozmieszczone w obrębie całej badanej próbki (w tym wypadku płytki cienkiej). Może to zostać osiągnięte poprzez wykonywanie fotografii wzdłuż regularnie rozmieszczonych linii pomiarowych, co dodatkowo zwiększy reprezentatywność pozyskanych danych.



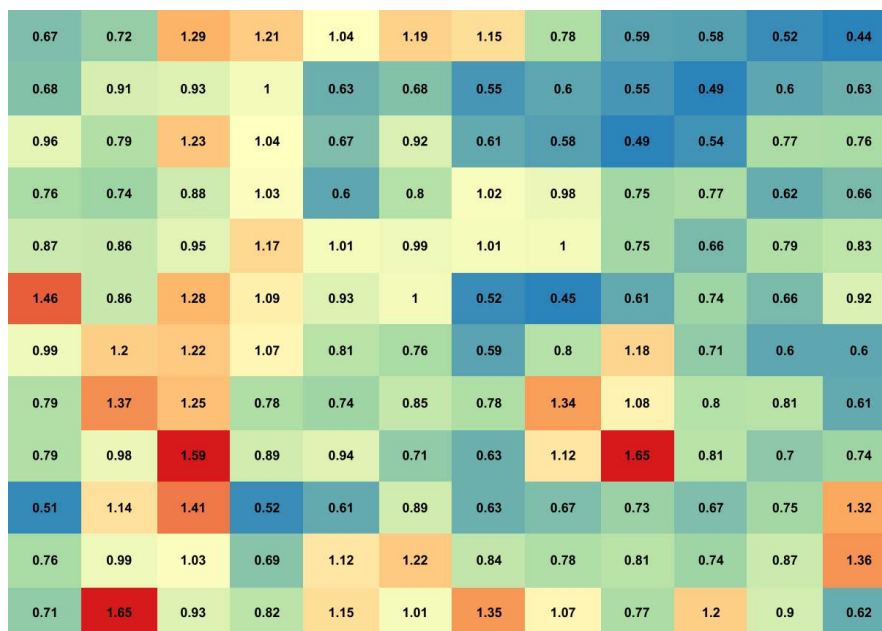
Rys. 2. Rozkład porowatości piaskowca po podziale na 144 prostokąty

Fig. 2. Porosity distribution after the division into 144 rectangles



Rys. 3. Rozkład wymiaru fraktalnego dla płytki cienkiej piaskowca

Fig. 3. Fractal dimension distribution of the sandstone thin section



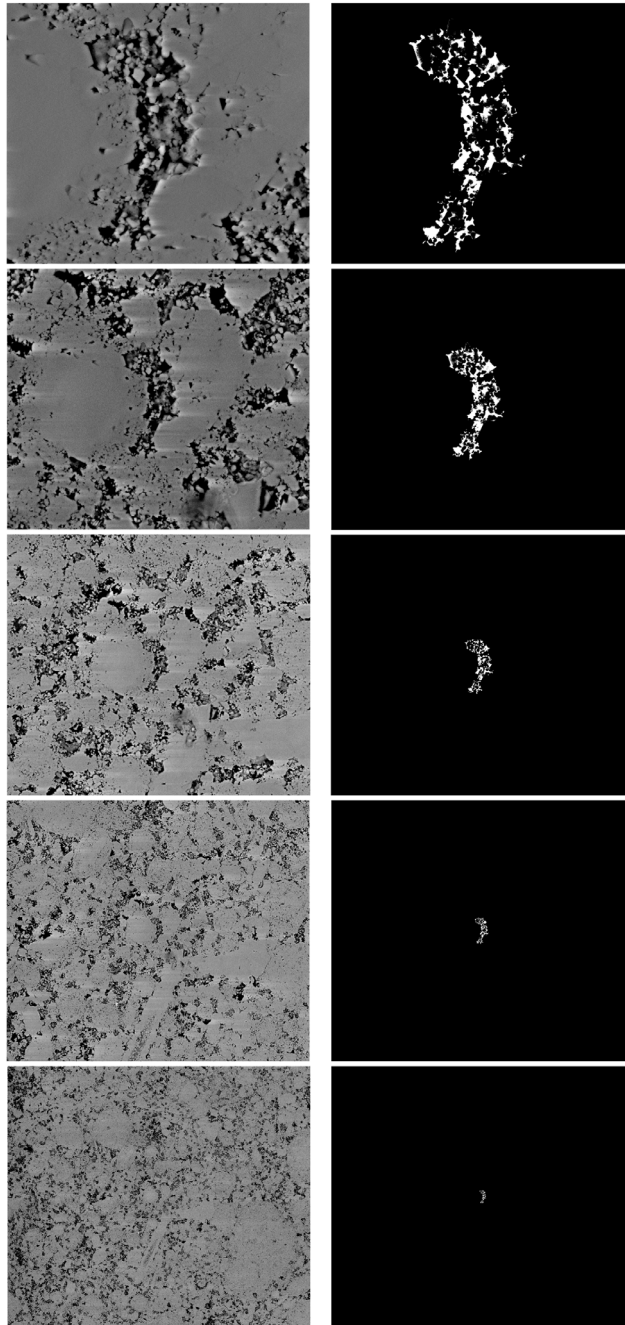
Rys. 4. Rozkład lakunarności dla płytki cienkiej piaskowca

Fig. 4. Lacunarity distribution of the sandstone thin section

3. Odpowiednie powiększenie

Kolejną istotną kwestią podczas analizy obrazu struktur porowych skał jest odpowiedni dobór powiększenia. Jeżeli badaniu nie są poddawane konkretne średnice porów, tylko przestrzeń porowa jako całość to otrzymane wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności będą się różnić w zależności od powiększenia. Aby przedstawić to zjawisko, sfotografowano jurajski wapień organodetrytyczny. Według klasyfikacji wapieni Dunhama (1962) jest to wackston. Tło skalne reprezentowane jest głównie przez mikryt, w którym w formie rozproszonej występują ziarna szkieletowe oraz nieszkieletowe. Wśród ziaren szkieletowych wyróżniono między innymi fragmenty skorup małżów, ślimaków oraz szkarłupni. Wnętrza nielicznych muszli zostały zastąpione mikrosparytym węglanowym. Natomiast wśród ziaren nieszkieletowych zidentyfikowano ooidy oraz peloidy. Dodatkowo w skale występują pojedyncze drobne, słabo otoczone ziarna kwarcu oraz agregaty związków żelaza (dolna część profilu).

Zdjęcia wykonano przy pomocy mikroskopu skaningowego z emisją polową (FEG-SEM), firmy FEI Quanta 200 znajdującego się w Laboratorium Wydziałowym Badań Fazowych, Strukturalnych, Teksturalnych i Geochemicznych Katedry Mineralogii, Petrografii i Geochemii WGGiOŚ AGH z wykorzystaniem elektronów wstecznie rozproszonych (BSE). Wykonano pięć zdjęć o różnych powiększeniach (rys. 5), każde skupione na tym samym porze.



Rys. 5. Obraz SEM wapienia (po lewej) oraz pojedynczy por (po prawej).
Powiększenie obrazu (od góry): 2000×, 1000×, 500×, 240×, 120×

Fig. 5. Limestone SEM images (left) and a single pore (right).
Magnification (from top): 2000×, 1000×, 500×, 240×, 120×

Do binaryzacji obrazów SEM posłużył algorytm Sauvola (Sauvola i Pietikäinen 1999). Ponadto przygotowana została druga seria tych samych fotografii, gdzie dodatkowo usunięte ze zdjęcia zostały wszystkie pozostałe pory.

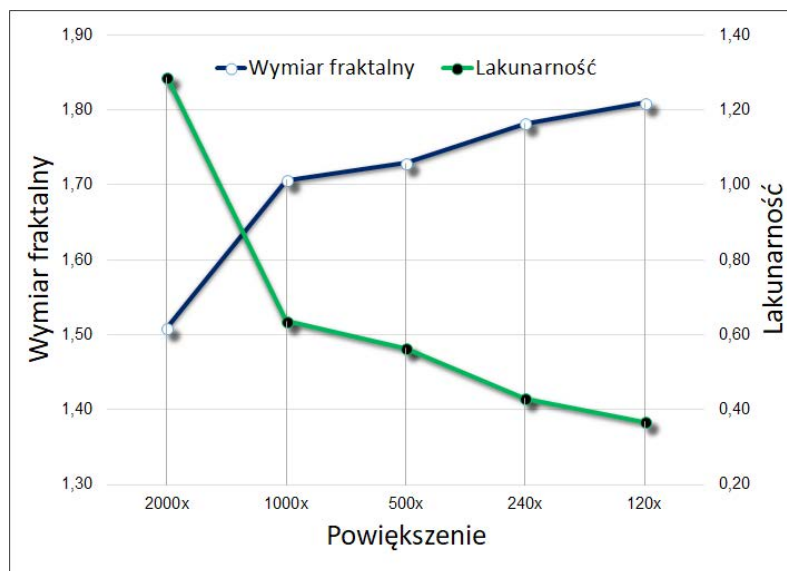
Dla tak przygotowanych zdjęć wyznaczone zostały: porowatość, wymiar fraktalny oraz lakunarność. Dokładne wyniki przedstawiono w tabeli 1. Dodatkowo ich zmienność ukazano na wykresach (rys. 6–7). Analizując zależność obu parametrów fraktalnych dla pojedynczego pora od powiększenia, stwierdzić można, że ich wartości rosną wraz z powiększeniem obrazu (dla wymiaru fraktalnego od 1,477 do 1,638 a dla lakunarności od 0,489 do 0,652). W przypadku drugim – gdy rozważany jest cały obraz struktury wapienia wraz z sąsiadującymi porami – dla wymiaru fraktalnego dostrzegalna jest zależność odwrotna. Wartości są zbliżone do siebie w granicach 1,7–1,8 w większości przedziału powiększeń. Natomiast lakunarność się zmienia od 0,367 do 1,287.

TABELA 1. Wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności dla poszczególnych zdjęć wraz z odpowiadającym im powiększeniem obrazu

TABLE 1. Fractal dimension and lacunarity values of each photo with corresponding magnification factor

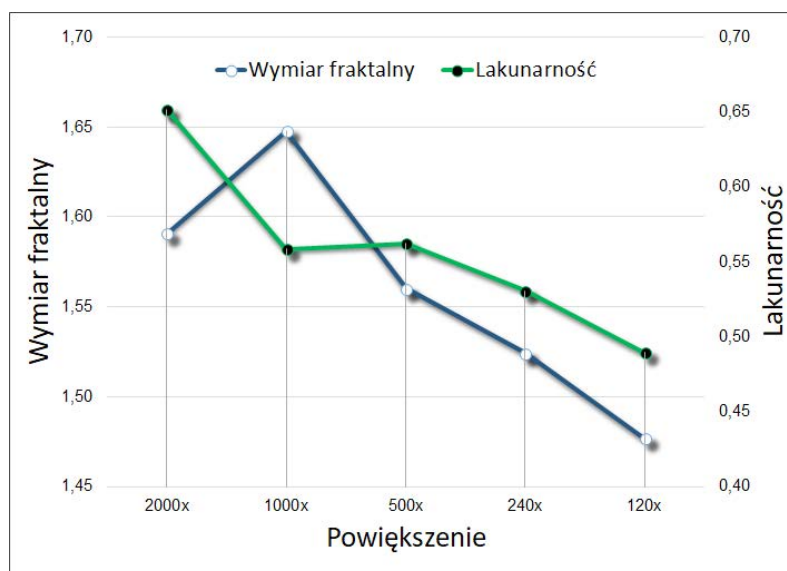
	Powiększenie	1 piksel [μm]	Wymiar fraktalny [-]	Lakunarność [-]
Pojedynczy por	2 000×	0,033	1,591	0,652
	1 000×	0,066	1,638	0,559
	500×	0,132	1,560	0,562
	240×	0,275	1,524	0,531
	120×	0,550	1,477	0,489
Całość	2 000×	0,033	1,510	1,287
	1 000×	0,066	1,707	0,636
	500×	0,132	1,730	0,564
	240×	0,275	1,782	0,430
	120×	0,550	1,809	0,367

Istotnym wnioskiem płynącym z powyższej analizy jest fakt, że na wartość wymiaru fraktalnego struktury porowej (w tym wypadku wapienia), badanego w oparciu o analizę obrazu wpływ mają zarówno pory duże, jak i te mniejsze, które dodatkowo zostały uchwycone na zdjęciu (Wang i in. 2015). Aby jak najdokładniej wyznaczyć wymiar fraktalny badanego, pojedynczego pora (lub dowolnej innej struktury), powinien zostać on sfotografowany w jak największej rozdzielczości a dodatkowe „zakłócenia” na obrazie usunięte. Analizując wartości wymiaru fraktalnego dla całej struktury porowej, stwierdzić można, że powiększenie obrazu nie ma aż tak dużego wpływu na wynik. W niektórych wypadkach zmiana wymiaru fraktalnego z powiększeniem może zostać nawet pominięta. Spadek wartości lakunarności w obu wypadkach może zostać wytłumaczony poprzez zwiększenie jednorodności zdjęcia.



Rys. 6. Zmiana parametrów fraktalnych z rosnącą krotnością powiększenia obrazu dla zdjęcia całej próbki

Fig. 6. Fractal parameters change with magnification factor of the entire sample



Rys. 7. Zmiana parametrów fraktalnych z rosnącą krotnością powiększenia obrazu dla zdjęcia pojedynczego pora

Fig. 7. Fractal parameters change with magnification factor of the single pore

Przy analizie pojedynczego pora, można zauważyć, że staje się on coraz mniejszy i tracone są detale, przez co przy obrocie zdjęcia, wraz ze zmniejszeniem przybliżenia obraz wygląda coraz bardziej jednakowo. Na zdjęciach całego obszaru przy zmniejszaniu powiększenia pojawiają się dodatkowe pory, które obrazują naturalną jednorodność przestrzeni porowej badanego wapienia w analizowanym zakresie średnic.

4. Sposób przedstawiania rozkładu przestrzennego parametrów fraktalnych

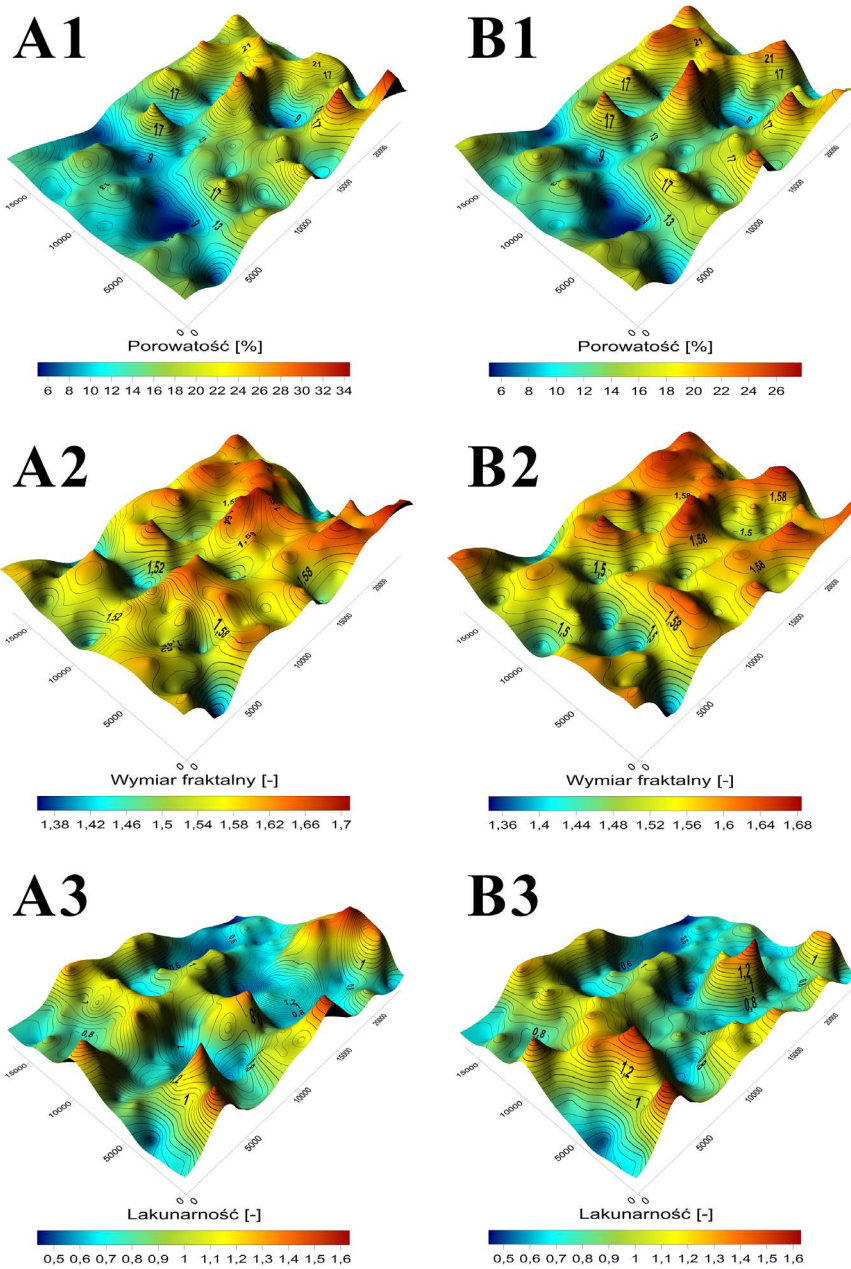
Mając odpowiednią ilość punktów na danej powierzchni, w obrębie których wyznaczone zostały parametry fraktalne, możliwe jest wyznaczenie ich rozkładu przestrzennego w formie map. W tym celu, biorąc pod uwagę analizę obrazu, zastosowane mogą zostać dwa podejścia:

- Binarystacja zdjęcia → podział na prostokąty → wyznaczenie wartości wymiaru fraktalnego i lakunarności → przypisanie ich do geometrycznych środków prostokątów → interpolacja wartości i utworzenie map.
- Podział na prostokąty → binaryzacja zdjęcia → wyznaczenie wartości wymiaru fraktalnego i lakunarności → przypisanie ich do geometrycznych środków prostokątów → interpolacja wartości i utworzenie map.

Obie metody różnią się momentem, w którym następuje binaryzacja zdjęcia. Jest to kwestia istotna, a otrzymane wyniki znacząco się różnią. Zjawisko to zobrazowane zostało wykorzystując poprzednio wspomniane zdjęcie struktury porowej piaskowca gruboziarnistego oraz odwołując się do jego porowatości. Dokonując podziału fotografii na 144 równe prostokąty (12×12), utworzone zostały mapy rozkładu porowatości, wymiaru fraktalnego oraz lakunarności stosując metodę a) oraz b) (rys. 8) Jako metodę interpolacji zastosowano kriging.

Mapy różnią się w zależności od zastosowanej metodyki. Binarystacja zdjęć wykonywana została manualnie przy użyciu programu ImageJ. Dla każdego z nich konieczne było indywidualne, odpowiednie dostosowanie parametrów: zakresu barw (ang. *hue*), nasycenia koloru (*saturation*) oraz jasności (*brightness*). Analiza każdego zdjęcia osobno umożliwia lepsze i bardziej dokładne zaznaczenie porów w danej strukturze. Zastosowana siatka 144 prostokątów była umowna. Stosując metodę B, średnia wartość porowatości dla całego obrazu będzie się różnić w zależności od zastosowanego podziału, ponieważ bardziej gęsta siatka umożliwi dokładniejsze zaznaczenie przestrzeni porowej dla poszczególnych jej fragmentów. Natomiast średnie wartości parametrów fraktalnych będą się zmieniać, ponieważ wraz ze wzrostem ilości zdjęć po podziale całości maleje ich rozdzielczość (ilość pikseli). Zostało to pokazane w czwartym rozdziale.

Alternatywą wydaje się więc początkowa binaryzacja dla całego zdjęcia, a następnie jego podział na prostokąty (metoda A). W tym wypadku, stosując regularną siatkę podziału, porowatość będzie stała, niezależna od ilości zdjęć. Przedstawić to można za pomocą następującego dowodu matematycznego. Dane zdjęcie o rozdzielczości x pikseli w poziomie oraz y pikseli w pionie zostało podzielone na n części w poziomie oraz m w pionie, tworzących równe prostokąty, gdzie $x, y, n, m \in \mathbb{N}$, a zastosowana siatka podziału jest regularna.



Rys. 8. Rozkład porowatości oraz parametrów fraktalnych w zależności od metodyki wyznaczania rozkładów przestrzennych w formie map. Mapy od A1 do A3 wykonano poprzez binaryzację dużego zdjęcia i następnie jego podziału, a od B1 do B3 poprzez indywidualną binaryzację poszczególnych zdjęć

Fig. 8. PPorosity and fractal parameters distribution depending on a methodology. Maps from A1 to A3 have been created by binarizing the big picture and then its division, while maps from B1 to B3 by individual binarization of smaller pictures

Może to zostać przedstawione w postaci macierzy M o wymiarach m na n , gdzie a_{ij} oznacza prostokąt, w którym jest b_{ij} białych pikseli (reprezentujących pory) itd.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Porowatość prostokąta a_{ij} wynosi:

$$\varphi_{ij} = \frac{b_{ij}}{\text{pole}} = \frac{b_{ij}}{\frac{1}{n} \cdot x \cdot \frac{1}{m} \cdot y} = \frac{n \cdot m \cdot b_{ij}}{x \cdot y} \quad (4)$$

Analogicznie dla pozostałych prostokątów.

Średnia porowatość wyrażona jest poprzez średnią arytmetyczną:

$$\bar{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{n \cdot m \cdot b_{ij}}{x \cdot y}}{n \cdot m} \quad (5)$$

gdzie $n \cdot m$ określa ilość prostokątów i jest wartością stałą, więc:

$$\bar{\varphi} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}}{x \cdot y} \quad (6)$$

Z drugiej strony porowatość całego zdjęcia (jako stosunek ilości pikseli białych do wszystkich) poprzez zsumowanie b wynosi:

$$\varphi = \frac{\text{białe piksele}}{\text{rozdzielczość}} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij}}{x \cdot y} \quad (7)$$

czyli:

$$\bar{\varphi} = \varphi \quad (8)$$

Wnioskiem płynącym z przedstawionego dowodu jest fakt, że jeżeli siatka podziału jest regularna, to niezależnie od dokonanego podziału średnia wartość porowatości poszczególnych jej elementów będzie stała i równa porowatości całego zdjęcia.

W związku z tym ponownie nasuwa się pytanie – która metoda jest lepsza? Pojedyncza analiza zdjęć bez stosowania odpowiednich algorytmów jest bardziej czasochłonna, jednak bardziej dokładna, co bezpośrednio przekłada się na adekwatność wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności.

Podsumowanie

Biorąc pod uwagę wszystkie wspomniane wyżej rozważania, zauważalne jest, że analiza błędów przy wyznaczaniu wartości wymiaru fraktalnego oraz lakunarności struktur porowatych, które są bezpośrednio powiązane z porowatością, jest zagadnieniem skomplikowanym. Analiza obrazu zawsze ograniczona będzie rozdzielczością oraz ilością wykonywanych zdjęć. Nie istnieje jedna, słuszna metodyka wyznaczania wartości parametrów fraktalnych. Tak samo jak przy innego typu badaniach, istotna jest analiza popełnianych błędów pomiarowych. Ich całkowite wyeliminowanie jest niemożliwe, jednak należy dążyć do jak największego ich zredukowania. Przedstawione rozważania, które traktowane powinny być jak wskazówki, mogą zostać podsumowane w następujących punktach:

1. Poprawnie dobrany zbiór zdjęć zawiera zarówno obszary bardzo porowate, o umiarkowanej porowatości oraz te, w których dominuje (w tym wypadku) matryca skalna. Ilość zdjęć powinna być reprezentatywna oraz adekwatna do badanego obszaru.
2. Parametry fraktalne zmieniają się wraz z rozdzielczością i powiększeniem obrazu. Dla stosunkowo dużego zakresu powiększeń, różnice w wymiarze fraktalnym są niewielkie, jeśli analizowana jest cała przestrzeń porowa a nie pojedynczy por.
3. Binaryzacja zdjęcia jest istotna, zarówno pod względem dokładności przedstawienia realnej struktury porowej, jak i również znaczenie ma moment jej wykonania w trakcie tworzenia map rozkładu parametrów. Proces prowadzony dla pojedynczych zdjęć po podziale większego obrazu jest bardziej czasochłonny, jednak otrzymane wyniki są bardziej poprawne i lepiej odzwierciedlają rzeczywistość.

Autor pragnie złożyć najszczerze podziękowania dr inż. Joannie Lewandowskiej-Śmierchalskiej za pomoc finansową w realizacji badań oraz owocne konsultacje merytoryczne. Bez tego wkładu rezultat końcowy byłby niemożliwy do osiągnięcia.

Literatura

- Leśniak, G. 1999. Zastosowanie komputerowej analizy obrazu w badaniach petrofizycznych. *Przegląd Geologiczny* t. 47, z. 7, s. 644–651.
- Liu, K. i Ostadhassan, M. 2017. Multi-scale fractal analysis of pores in shale rocks. *Journal of Geophysics* t. 140, s. 1–10.
- Mandelbrot, B. 1977. *The fractal geometry of nature*. Wyd. 1. New York, W.H. Freeman and Company.
- Nayak, S.R. i Mishra, J. 2016. An improved method to estimate the fractal dimension of colour images. *Perspectives in Science* t. 8, s. 412–416.
- Plotnick, R.E. 2017. Recurrent hierarchical patterns and the fractal distribution of fossil localities. *Geology* t. 45, nr 4, s. 295–298.

- Sauvola, J. i Pietikäinen, M. 1999. Adaptive document image binarization. *Pattern Recognition* t. 33, nr 2, s. 225–236.
- Such, P. 2000. Studium badań przestrzeni porowej skał dla potrzeb geologii naftowej. *Prace INiG* nr 104.
- Such i in. 2007 – Such, P., Leśniak, G. i Budak, P. 2007. Kompleksowa metodyka badania właściwości petrofizycznych skał. *Prace INiG* nr 142.
- Wang i in. 2012 – Wang, H., Liu, Y., Song, Y., Zhao, Y., Zhao, J. i Wang, D. 2012. Fractal analysis an its impact factors on pore structure of artificial cores based on the images obtained using magnetic resonance imaging. *Journal of Applied Geophysics* t. 86, s. 70–81.
- Wang i in. 2015 – Wang, J.Z., Ma, J., Ao, Q.B., Zhi, H. i Tang, H.P. 2015. Review of Fractal Analysis of Porous Metal Materials. *Journal of Chemistry* 2015, s. 1–6.

