



Mariusz KRZAK\*

## **Baza zasobowa wybranych złóż kopalin metalicznych w Polsce w ujęciu logiki rozmytej**

Streszczenie: Polska jest krajem bogatym w złoża kopalin użytecznych. W Bilansie zasobów złóż kopalin (Szufficki i in. (red.) 2016) zestawiono 13 586 rekordów złóż w podziale według ich przydatności surowcowej. W tak licznyim zbiorze dominują złoża kopalin skalnych, podczas gdy złoża rud metali mają w ujęciu ilościowym znaczenie podrzędne. Obraz ten ulega jednak zmianie pod względem jakościowym – wartości produkcji surowców. Wartość wyprodukowanych surowców metalicznych plasuje je zaraz po dominujących – w tym aspekcie oceny – surowcach energetycznych.

Kluczowe elementy oceny parametrów złoża obejmują szacowanie zasobów oraz jakości kopaliny. Wielkości te są znacznie zróżnicowane pomiędzy złożami i często, zamiast konkretnych wielkości numerycznych, dla ułatwienia opisu, stosowane są określenia nieprecyzyjne (rozmyte). Granice pomiędzy stanem, kiedy złożo jest duże czy małe, bogate czy ubogie, są umowne, oparte na rozkładach w populacji i nie zawsze jednoznacznie kwalifikują obiekt do danej klasy. Tymczasem stopniowanie przynależności złoża do danej klasy wielkościowej może być zrealizowane z wykorzystaniem teorii zbiorów rozmytych. W artykule wskazano na możliwości takiej kwalifikacji w odniesieniu do udokumentowanych złóż kopalin metalicznych w Polsce, poszerzając rozważania o zasygnalizowanie możliwości zastosowania operatorów logiki rozmytej w ocenie zarówno ilościowych, jak i jakościowych parametrów złóż.

Słowa kluczowe: zasoby złoża, jakość kopaliny, zbiory rozmyte, operator logiczny

## **Resources base of selected metallic mineral deposits in Poland in terms of fuzzy logic**

Abstract: Poland is a country rich of mineral deposits. In the Annual Report of Mineral Resources there is a list of 13,586 records of mineral deposits in Poland according to their suitability as raw materials. In such a large set, rock mineral deposits dominate, while ore metals deposits are of secondary quantitative importance. This image changes in terms of the production value of metallic raw materials. The value of the metallic raw-materials produced places it after energy raw materials, dominating in this aspect.

\* Dr hab. inż., AGH Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków.

Key parameters evaluated during the mineral deposit recognition include resources estimation and the quality of minerals. These values are significantly different between deposits and often, instead of specific numerical values for ease of description, imprecise (fuzzy) description is used. The borders between the state in which the mineral deposit is big or small, rich or poor, are conventional, based on population distributions and do not always clearly qualify the object to the class. Meanwhile, such mineral deposits membership gradation to the volume size class may be carried out with the fuzzy sets theory. In the article the possibility of such qualification in relation to the recognized ore deposits in Poland has been pointed out. The possibility of fuzzy logic operators use in the assessment of both quantitative and qualitative parameters of this resources base have additionally been signaled.

Keywords: mineral deposit resources, mineral grade, fuzzy sets, logic operator

## 1. Złoża rud metali w Polsce – główne parametry

Złoża kopalin metalicznych zestawione w Bilansie zasobów (Szufflicki i in. 2016) obejmują złoża rud:

- cynku i ołowiu,
- miedzi i srebra,
- żelaza, tytanu i wanadu,
- molibdenowo-wolframowo-miedziowych,
- niklu,
- złota, arsenu i cyny,

uwzględniając także pierwiastki współwystępujące w wymienionych rudach oraz innych kopalinach.

Tylko dwie pierwsze grupy złóż mają obecnie znaczenie gospodarcze. Występujące w masywie suwalskim złoża rud żelaza, tytanu i wanadu, z uwagi na niespełnienie kryteriów bilansowości traktowane są jako pozabilansowe. Porfirowe złoża Mo-Cu-W nie były dotąd przedmiotem eksploatacji. Do roku 1983 eksploatowano rudy niklu ze złoża w Szklarach. W roku 1960 zamknięto natomiast kopalnię złotonośnych rud arsenowych Au-As w Złotym Stoku. Wykazywana w Bilansie (Szufflicki i in. 2016) produkcja niektórych towarzyszących surowców metalicznych (np. niklu) ma charakter marginalny, a prezentowany ubytek zasobów z tytułu wydobycia (np. kadmu, kobaltu, molibdenu) nie jest powiązany z odzyskiem surowców tych metali.

W grupie złóż rud cynku i ołowiu zestawiono w Bilansie zasobów 20 obiektów, podczas gdy w obrębie złóż miedziowo-srebranych figuruje ich 15 (tab. 1, tab. 2).

Charakterystykę ilościową złóż rud Zn-Pb oraz Cu-Ag zobrazowano na rysunkach 1 i 2. Pominięto na nich złoża o zasobach pozabilansowych oraz te skreślone z bilansu.

## 2. Parametry zasobowe i jakościowe złóż w ujęciu klasycznym i rozmytym

W populacji złóż rud cynkowo-ołowiowych dominują złoża o zasobach poniżej 2 mln ton, a 90% złóż mieści się w klasie zasobów poniżej 18 mln ton (rys. 1). Wartość środkowa wynosi 1,6 mln ton. Rozkład złóż Cu-Ag jest znacznie bardziej równomierny, a wartość środkowa wynosi w tym przypadku 137 mln ton.

Obok zasobów złoża istotnym z użytkowego punktu widzenia parametrem jest jakość kopaliny. Z kopaliny o odpowiedniej jakości możliwe i celowe jest pozyskanie konkretnego,

TABELA 1. Wykaz udokumentowanych złóż rud Zn-Pb; stan na 31 XII 2015 według Bilansu zasobów... (Szuflicki i in. 2016)

TABLE 1. List of recognized deposits of Zn-Pb ores as of 12.31.2015 (acc. to Annual Report of Mineral Resources in Poland, Szuflicki et. al 2016)

Nazwa złoża	Stan zagospodarowania	Zasoby geologiczne bilansowe rudy [mln ton]	Zasoby metali Zn, Pb [mln ton]
Bibiela-Kalety	P	pzb	–
Bolesław	Z	pzb	–
Czechło	P	1,605	0,076 0,049
Dąbrówka Wielka	Z	pzb	–
Gołuchowice	R	16,916	0,562 0,149
Jaroszowice-Pazurek	P	0,169	0,003 0,003
Jaworzno	Z	pzb	–
Klucze	R	2,671	0,141 0,119
Klucze I	E	1,053	0,045 0,018
Krzykawa	Z	pzb	–
Laski	R	8,010	0,293 0,063
Marciszów	P	0,778	0,034 0,013
Olkusz	E	1,568	0,060 0,014
Pomorzany	E	11,314	0,442 0,190
Poręba	P	0,799	0,029 0,016
Rodaki-Rokitno Szlacheckie	P	2,632	0,111 0,027
Siewierz	P	0,317	0,009 0,018
Sikorka	R	3,445	0,162 0,149
Zawiercie 3	R	32,202	1,583 0,572
Zawiercie I	R	0,338	0,015 0,018

E – złożo eksploatowane  
P – złożo o zasobach rozpoznanych wstępnie  
R – złożo o zasobach rozpoznanych szczegółowo  
Z – złożo zaniechane  
pzb – zasoby pozabilansowe

TABELA 2. Wykaz udokumentowanych złóż rud Cu-Ag; stan na 31 XII 2015 według Bilansu zasobów... (Szuflicki i in. 2016)

TABLE 2. List of recognized deposits of Cu-Ag ores as of 12.31.2015 (acc. to Annual Report of Mineral Resources in Poland, Szuflicki et. al 2016)

Nazwa złoża	Stan zagosp.	Zasoby geologiczne bilansowe rudy [mln ton]	Zasoby metali Cu [mln ton] Ag [tys. ton]
Bytom Odrzański	R	2,247	0,093 0,054
Gaworzyce	M	–	–
Głogów	R	pzb	
Głogów Głęboki-Przemysłowy	E	289,510	6,920 22,869
Lubin-Małomice	E	380,062	5,013 21,021
Niecka Grodziecka	Z	10,291	0,141 0,501
Nowy Kościół	Z	13,478	0,116 0,583
Polkowice	E	104,416	2,469 4,899
Radwanice-Gaworzyce	R	344,300	4,730 9,078
Radwanice-Wschód	M	–	–
Radwanice-Zachód	M	–	–
Retków	R	137,288	2,151 11,031
Rudna	E	369,081	6,143 17,319
Sieroszowice	E	265,481	7,058 16,507
Wartowice	R	79,316	1,165 4,260

E – złożo eksploatowane

P – złożo o zasobach rozpoznanych wstępnie

R – złożo o zasobach rozpoznanych szczegółowo

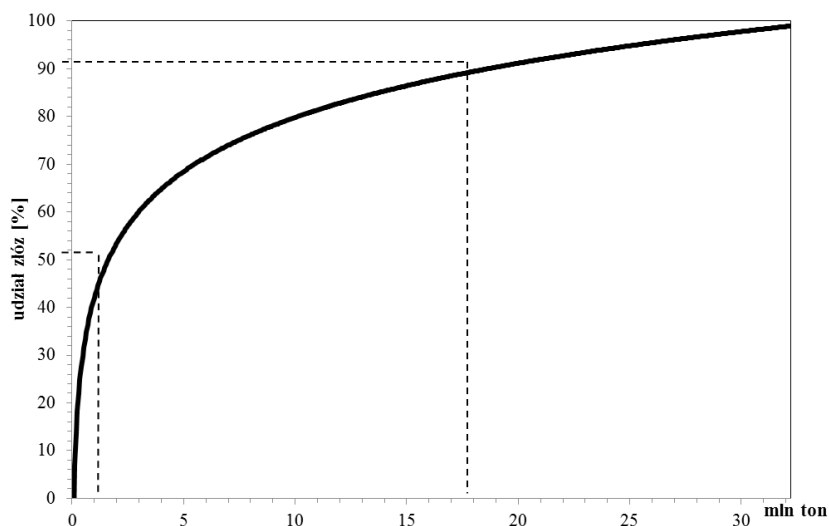
M – złożo skreślone z bilansu w roku sprawozdawczym

Z – złożo zaniechane

pzb – zasoby pozabilansowe

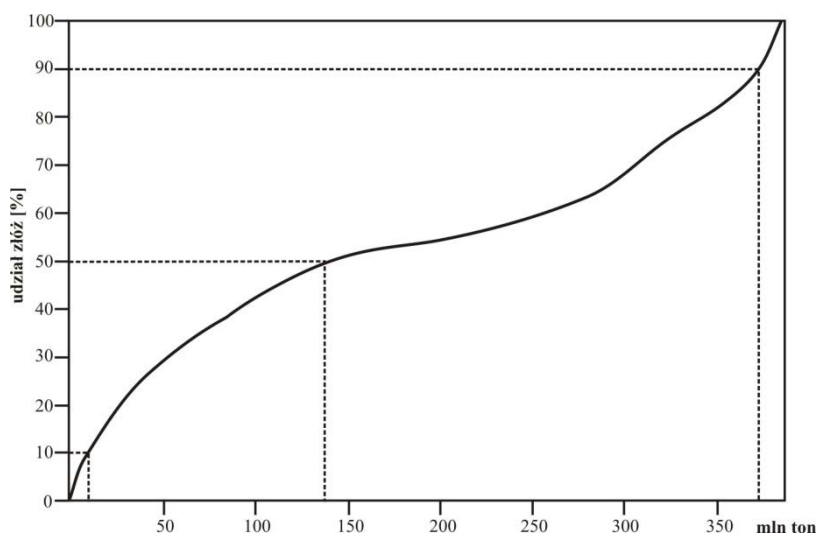
poszukiwanego przez rynek, surowca. Porównanie zasobów i zawartości cynku oraz miedzi w złożach zobrazowano na rysunku 3 oraz 4.

Na prezentowanych rysunkach widnieją podstawowe parametry złóż w ujęciu konwencjonalnym. Są one precyzyjnie zdefiniowane. Dla przykładu złożo Polkowice (obwiedzione elipsą na rysunku 4) o zasobach 104,416 mln ton i zawartości metalu w rudzie 2,36% Cu jest opisane za pomocą dwóch singletonów – zasobowego i jakościowego. Ta konkretna



Rys. 1. Model ilościowy polskich złóż rud Zn-Pb

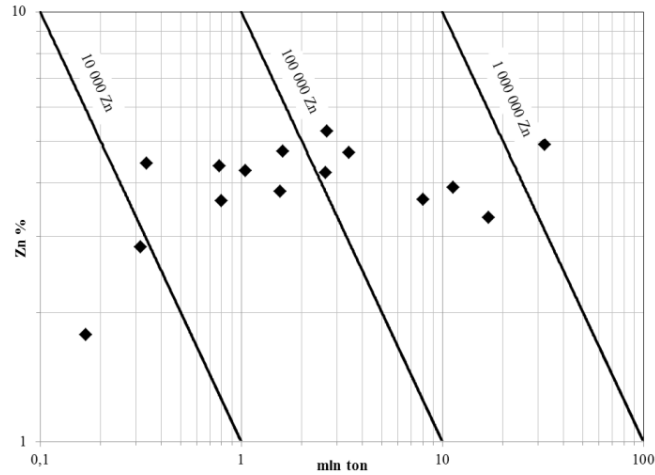
Fig. 1. Quantitative model of Zn-Pb ore deposits in Poland



Rys. 2. Model ilościowy polskich złóż rud Cu-Ag

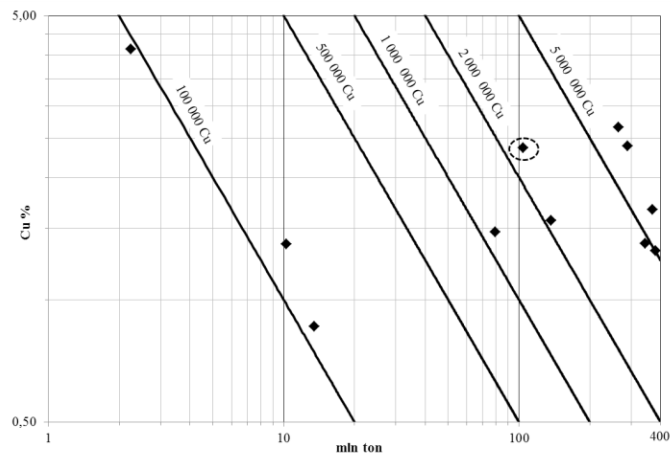
Fig. 2. Quantitative model of Cu-Ag ore deposits in Poland

wielkość zasobów wynika z oszacowania i jest obciążona błędem oceny. Niemniej nie fakt szacowania zasobów jest tu istotny, ale próba nieprecyzyjnej (deskryptywnej) ich oceny. Mediana, jak wspomniano, dla złóż miedziowo-srebrowych wynosi 137 mln ton, a więc złoża Polkowice jest zapewne gdzieś w kategoriach złoża średniego. Opis „średnie” i idąc dalej „duże”, „małe” są mianami funkcji przynależności. Dzięki tej jakościowej ocenie wia-



Rys. 3. Porównanie zasobów i zawartości cynku w polskich złożach rud Zn-Pb

Fig. 3. Comparison of resources and zinc content in Polish Zn-Pb ore deposits



Rys. 4. Porównanie zasobów i zawartości miedzi w polskich złożach rud Cu-Ag

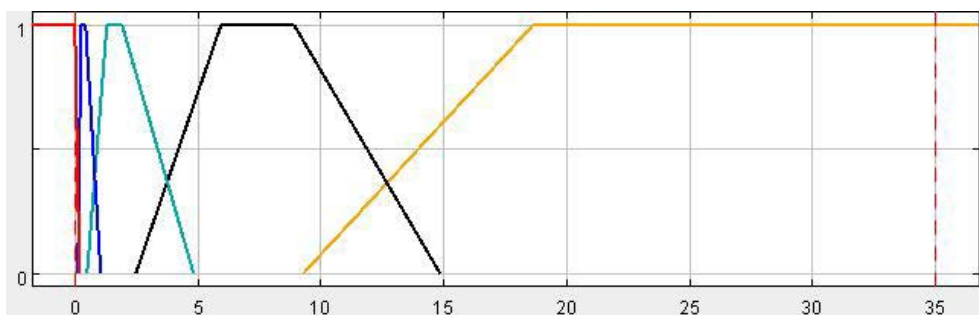
Fig. 4. Comparison of resources and copper content in Polish Cu-Ag ore deposits

domo, czy precyzyjnie określone zasoby zaliczone będą do zbioru „średnich” czy też innych. Ta zgrubna, opisowa informacja określana jest w terminologii zbiorów rozmytych mianem ziarno (granul) (Zadeh 1996). W celu zwiększenia precyzji oceny wyróżniana jest zwykle większa liczba ziaren, jakkolwiek istotny jest tu także dobór ich szerokości.

W teorii zbiorów rozmytych element może należeć do zbioru w pełni, należeć częściowo lub nie należeć wcale (Zadeh 1965). Stopień, w jakim element należy do zbioru rozmytego  $A$  nazywany jest funkcją przynależności (funkcją charakterystyczną). Uwzględniając wspomniane trzy przypadki przynależności, możliwe są następujące sytuacje:

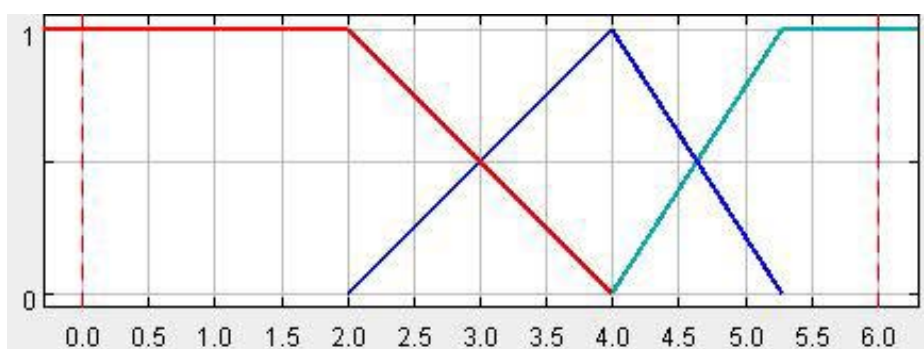
1.  $\mu_A(x) = 1$ , element w pełni przynależy do zbioru rozmytego  $A$ ,
2.  $\mu_A(x) = 0$ , element nie przynależy do zbioru rozmytego  $A$ ,
3.  $0 < \mu_A(x) < 1$ , element częściowo przynależy do zbioru rozmytego  $A$ .

Konstrukcja funkcji przynależności, czyli wyglądu zbioru rozmytego, realizowana jest zwykle na dwa sposoby: w pierwszym – kształt zbioru rozmytego ustalony jest przez eksperta, w drugim – powstaje na skutek aproksymacji zbioru wartości liczbowych (Łachwa 2001). Dla rozważanych złóż rud Zn-Pb i Cu-Ag zastosowano podejście aproksymacyjne i zasugerowano pięć klas granuli dla zasobów oraz trzy dla jakości rudy. W obrębie klas zasobowych wyróżniono złoża: „bardzo małe”, „małe”, „średnie”, „duże” oraz „bardzo duże”, natomiast dla jakości rudy zaproponowano klasy: „niską”, „średnią” i „wysoką”. Wyróżnienie klas zasobowych oparto na decylach rzędu 0,1 i 0,9 oraz kwantylach rzędu 0,25; 0,5 oraz 0,75, podczas gdy dla klas jakości rudy przyjęto średnią arytmetyczną oraz minimalne wielkości wynikające z kryteriów bilansowości dla złóż poszczególnych rud. Stosowne funkcje przynależności zobrazowano na rysunkach 5, 6, 7 i 8.



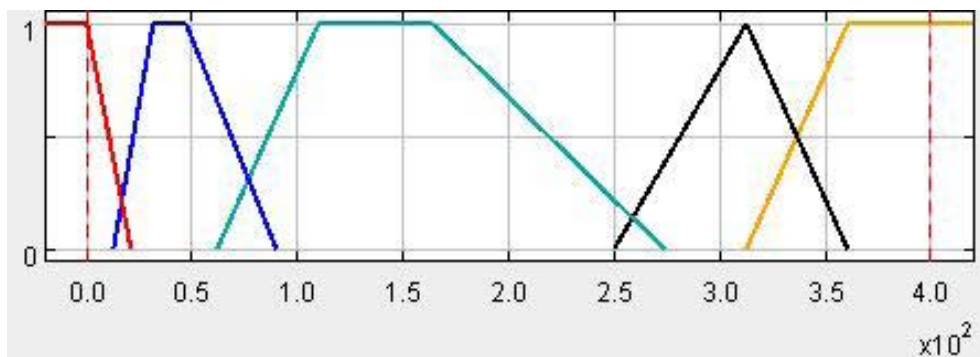
Rys. 5. Znaczenie terminów klas zasobowych złóż rud Zn-Pb (od lewej): „bardzo małe”, „małe”, „średnie”, „duże”, „bardzo duże” (wydruk z programu FisPro 3.5)

Fig. 5. The meaning of the terms Zn-Pb ore deposits' resources base (from left): 'very small', 'small', 'medium', 'large', 'very large' (FisPro 3.5 software plot)



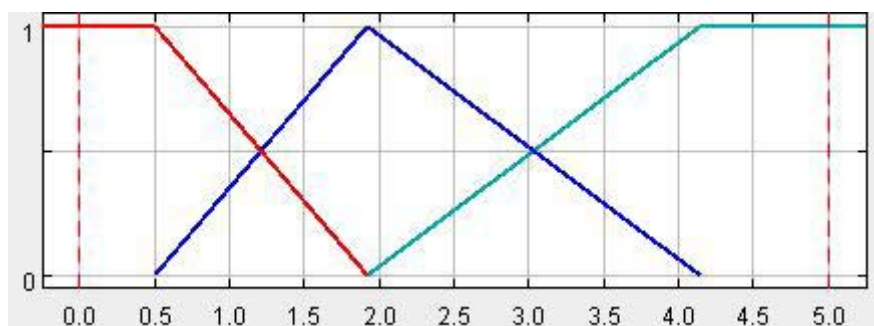
Rys. 6. Znaczenie terminów jakości rudy Zn-Pb (od lewej): „niska”, „średnia” i „wysoka” (wydruk z programu FisPro 3.5)

Fig. 6. The meaning of the terms Zn-Pb ore quality (from left): 'low', 'medium' and 'high' (FisPro 3.5 software plot)



Rys. 7. Znaczenie terminów klas zasobowych złóż rud Cu-Ag (od lewej): „bardzo małe”, „małe”, „średnie”, „duże”, „bardzo duże” (wydruk z programu FisPro 3.5)

Fig. 7. The meaning of the terms Cu-Ag ore deposits resources base (from left): ‘very small’, ‘small’, ‘medium’, ‘large’, ‘very large’ (FisPro 3.5 software plot)



Rys. 8. Znaczenie terminów jakości rudy Cu-Ag (od lewej): „niska”, „średnia” i „wysoka” (wydruk z programu FisPro 3.5)

Fig. 8. The meaning of the terms Cu-Ag ore quality (from left): ‘low’, ‘medium’ and ‘high’ (FisPro 3.5 software plot)

W tabelach 3 oraz 4 zestawiono wartości funkcji przynależności do klas zasobowych i jakościowych dla poszczególnych złóż rud Zn-Pb, skalkulowanych na podstawie zaproponowanych funkcji przynależności. Analogiczne przypisanie dla złóż Cu-Ag zamieszczono w tabelach 5 i 6.

Niektóre złoża cechuje podwójna kwalifikacja do klasy zasobowej lub jakościowej. Powodem tego stanu jest trudność w jednoznacznym ustaleniu granic zbiorów, wynikająca z konwersji miary opisowej do miary ilościowej. W metodologii zbiorów rozmytych wykorzystywane jest tu przybliżenie, że każde złożo jest np. „duże”, ale w pewnym odmiennym stopniu. Dla przykładu, złożo Rodaki–Rokitno Szlacheckie jest w wysokim stopniu zaliczone do klasy złoża „średniego”, ale także w pewnym, niewielkim zakresie należy do zbioru złóż „dużych”.



TABELA 3. Wartości funkcji przynależności złóż rud Zn-Pb w zakresie klas zasobowych

TABLE 3. Values of membership function for Zn-Pb ore deposits in the extent of resource classes

Nazwa złoża	Wartość funkcji przynależności do klasy zasobowej złoża				
	bardzo małego	małego	średniego	dużego	bardzo dużego
Cechłó	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Gołuchowice	0,00	0,00	0,00	0,00	0,82
Jaroszowice-Pazurek	0,20	0,15	0,00	0,00	0,00
Klucze	0,00	0,00	0,74	0,06	0,00
Klucze I	0,00	0,00	0,68	0,00	0,00
Laski	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
Marciszów	0,00	0,43	0,32	0,00	0,00
Olkusz	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Pomorzany	0,00	0,00	0,00	0,60	0,22
Poręba	0,00	0,40	0,35	0,00	0,00
Rodaki-Rokitno Szlacheckie	0,00	0,00	0,76	0,04	0,00
Siewierz	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
Sikorka	0,00	0,00	0,48	0,28	0,00
Zawiercie 3	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
Zawiercie I	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00

TABELA 4. Wartości funkcji przynależności złóż rud Zn-Pb w zakresie klas jakościowych

TABLE 4. Values of membership function for Zn-Pb ore deposits in the extent of ore grade

Nazwa złoża	Wartość funkcji przynależności do klasy jakościowej złoża		
	niskiej	średniej	wysokiej
Cechłó	0,00	0,42	0,58
Gołuchowice	1,00	0,00	0,00
Jaroszowice-Pazurek	0,00	0,00	1,00
Klucze	0,00	0,78	0,22
Klucze I	0,17	0,83	0,00
Laski	0,08	0,92	0,00
Marciszów	0,04	0,96	0,00
Olkusz	0,00	0,45	0,55
Pomorzany	0,34	0,66	0,00
Poręba	0,00	0,71	0,29
Rodaki-Rokitno Szlacheckie	0,18	0,82	0,00
Siewierz	0,00	0,82	0,18
Sikorka	0,58	0,42	0,00
Zawiercie 3	0,00	0,28	0,72
Zawiercie I	0,00	0,65	0,35

Podstawowe operacje mnogościowe stosowane w kontekście zbiorów rozmytych obejmują sumę (MAX) oraz iloczyn (MIN). Sumą mnogościową zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty  $A \cup B$ , z funkcją przynależności definiowaną jako (Łachwa 2001):

$$\bigwedge_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (1)$$

TABELA 5. Wartości funkcji przynależności złóż rud Cu-Ag w zakresie klas zasobowych

TABLE 5. Values of membership function for Cu-Ag ore deposits in the extent of resource classes

Nazwa złoża	Wartość funkcji przynależności do klasy zasobowej złoża				
	bardzo małego	małego	średniego	dużego	bardzo dużego
Bytom Odrzański	0,89	0,00	0,00	0,00	0,00
Głogów Głęboki-Przemysłowy	0,00	0,00	0,00	0,62	0,00
Lubin-Małomice	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
Niecka Grodziecka	0,51	0,00	0,00	0,00	0,00
Nowy Kościół	0,35	0,02	0,00	0,00	0,00
Polkowice	0,00	0,00	0,89	0,00	0,00
Radwanice-Gaworzyce	0,00	0,00	0,00	0,35	0,65
Retków	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Rudna	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00
Sierszowice	0,00	0,00	0,08	0,24	0,00
Wartowice	0,00	0,25	0,36	0,00	0,00

TABELA 6. Wartości funkcji przynależności złóż rud Cu-Ag w zakresie klas jakościowych

TABLE 6. Values of membership function for Cu-Ag ore deposits in the extent of ore grade

Nazwa złoża	Wartość funkcji przynależności do klasy jakościowej złoża		
	niskiej	średniej	wysokiej
Bytom Odrzański	0,00	0,00	1,00
Głogów Głęboki-Przemysłowy	0,00	0,79	0,21
Lubin-Małomice	0,43	0,57	0,00
Niecka Grodziecka	0,00	0,81	0,19
Nowy Kościół	0,39	0,61	0,00
Polkowice	0,25	0,75	0,00
Radwanice-Gaworzyce	0,19	0,81	0,00
Retków	0,00	0,67	0,33
Rudna	0,39	0,61	0,00
Sierszowice	0,75	0,25	0,00
Wartowice	0,32	0,68	0,00

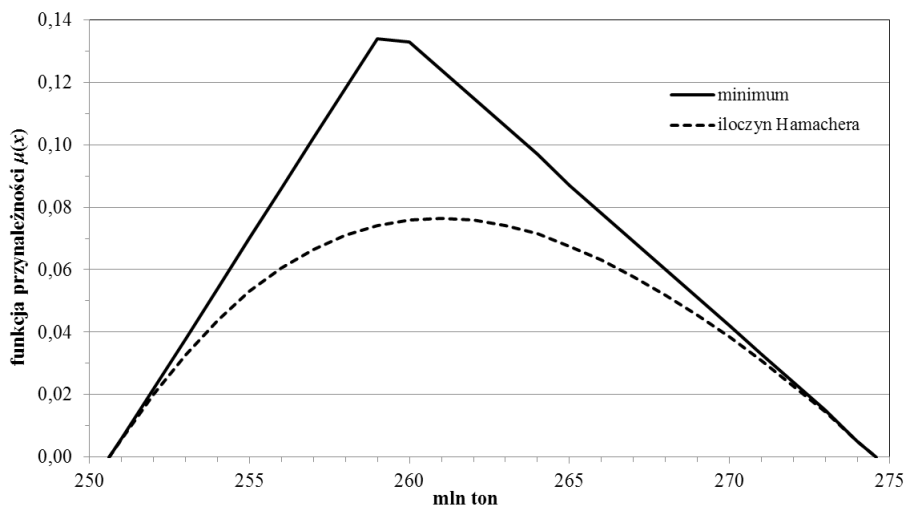
Iloczynem mnogościowym zbiorów rozmytych A i B jest zbiór rozmyty  $A \cap B$ , z funkcją przynależności definiowaną jako (Łachwa 2001):

$$\bigwedge_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \quad (2)$$

Zdefiniowane powyżej operacje mnogościowe nie zawsze dokładnie odzwierciedlają intuicyjne właściwości wykonanych operacji na zbiorach rozmytych. Zachodzi stąd konieczność wykorzystania nastawialnych i nienastawialnych operatorów *s*-normy (połączenia) lub *t*-normy (przecięcia) zbiorów. W przykładzie poniżej zademonstrowano wybrane dwa operatory *t*-normy (minimum (*MIN*) oraz iloczyn Hamachera) dla określenia funkcji przynależności wielkości zasobów złoża rud Cu-Ag do zbioru rozmytego „średnie I duże zasoby rudy” (rys. 9). Warto nadmienić, że definicja takiego zbioru nie byłaby możliwa według zasad klasycznej logiki zbiorów, natomiast w ujęciu logiki rozmytej złożo może być jednocześnie „średnie” i „duże”.

Iloczyn Hamachera definiowany jest jako (Łachwa 2001):

$$\bigwedge_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \frac{\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)}{\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)} \quad (3)$$



Rys. 9. Funkcje przynależności iloczynu logicznego „średnie I duże zasoby rudy”

Fig. 9. Membership functions of logical product ‘medium AND large ore deposit resources’

Kolejnym interesującym aspektem jest ocena w jakim stopniu dane złożo jest jednocześnie np. średniej wielkości i średniej jakości rudy (tab. 7). Wykorzystano w tym celu operatory *MIN* oraz iloczyn (*PROD*). Iloczyn (*PROD*) definiowany jest jako (Łachwa 2001):

$$\bigwedge_{x \in X} \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (4)$$

Zastosowanie operatora *MIN* może powodować pewną utratę części informacji, gdyż operator ten nie jest wystarczająco czuły. O przynależności do zbioru „średnie zasoby I śred-

TABELA 7. Wartości operatorów logicznych zbioru „średnie zasoby / średnia jakość rudy”

TABLE 7. Values of logical operators for a set 'medium resources AND medium ore grade'

	Wartość funkcji przynależności do klasy zasobów średnich (A)	Wartość funkcji przynależności do klasy rudy średniej jakości (B)	Wartość operatora MIN (A∩B)	Wartość operatora PROD (A∩B)
Chechło	1,00	0,42	0,42	0,42
Gołuchowice	0,00	0,00	0,00	0,00
Jaroszowice-Pazurek	0,00	0,00	0,00	0,00
Klucze	0,74	0,78	0,74	0,58
Klucze I	0,68	0,83	0,68	0,56
Laski	0,00	0,92	0,00	0,00
Marciszów	0,32	0,96	0,32	0,31
Olkusz	1,00	0,45	0,45	0,45
Pomorzany	0,00	0,66	0,00	0,00
Poręba	0,35	0,71	0,35	0,25
Rodaki-Rokitno Szlacheckie	0,76	0,82	0,76	0,62
Siewierz	0,00	0,82	0,00	0,00
Sikorka	0,48	0,42	0,42	0,20
Zawiercie 3	0,00	0,28	0,00	0,00
Zawiercie I	0,00	0,65	0,00	0,00

nia jakość rudy” decyduje mniejsza z funkcji przynależności. Widoczne jest to zwłaszcza w przypadku złóż Laski, Pomorzany, Siewierz i Zawiercie I, gdzie krytyczna jest funkcja przynależności do klasy zasobowej. Niezależnie od tego jak bogata byłaby ruda stopień przynależności iloczynu wyrażony za pomocą operatora *MIN* pozostałby taki sam (0,00). Operator *MIN* od strony decyzyjnej jest operatorem najbardziej optymistycznym. Reguły kwalifikacji do zbioru „średnie zasoby / średnia jakość rudy” są łagodniejsze i wymagają mniejszego stopnia spełnienia zarówno średnich wielkości zasobów jak i średniej jakości kopaliny. W przypadku operatora *PROD* konieczne jest spełnienie obu wymogów łącznie w wyższym stopniu.

Działanie operatorów połączenia zbiorów rozmytych zobrazowano przykładem zbioru rozmytego „duże zasoby *LUB* średnia jakość rudy” (tab. 8). Wykorzystano w tym celu dwa wybrane operatory: *MAX* oraz sumy algebraicznej. Suma algebraiczna definiowana jest następująco (Łachwa 2001):

$$\wedge_{x \in X} \mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (5)$$

Użycie operatora *MAX* powoduje, że przynależność do zbioru rozmytego „duże zasoby *LUB* średnia jakość rudy” zależy od wyższej z dwojga funkcji przynależności. Poza złożem Bytom Odrzański, pozostałe obiekty są w pewnym stopniu duże zasobowo lub średniej

TABELA 8. Wartości operatorów logicznych zbioru „duże zasoby *LUB* średnia jakość rudy”TABLE 8. Values of logical operators for a set 'large resources *OR* medium ore grade'

	Wartość funkcji przynależności do klasy zasobów dużych (A)	Wartość funkcji przynależności do klasy rudy średniej jakości (B)	Wartość operatora MAX (A B)	Wartość operatora sumy algebraicznej (AB)
Bytom Odrzański	0,00	0,00	0,00	0,00
Głogów Głęboki-Przemysłowy	0,62	0,79	0,79	0,92
Lubin-Małomice	0,00	0,57	0,57	0,57
Niecka Grodziecka	0,00	0,81	0,81	0,81
Nowy Kościół	0,00	0,61	0,61	0,61
Polkowice	0,00	0,75	0,75	0,75
Radwanice-Gaworzyce	0,35	0,81	0,81	0,88
Retków	0,00	0,67	0,67	0,67
Rudna	0,00	0,61	0,61	0,61
Sierszowice	0,24	0,25	0,25	0,43
Wartowice	0,00	0,68	0,68	0,68

jakości. Złóża Lubin-Małomice, Niecka Grodziecka, Niecka Grodziecka, Nowy Kościół, Polkowice, Retków, Wartowice pomimo zerowego stopnia przynależności do zbioru złóż o zasobach dużych wypełniają postulat przynależności do sumy logicznej zbioru rozmytego „duże zasoby *LUB* średnia jakość rudy” z uwagi na wartość funkcji przynależności do klasy jakościowej. Warto zauważyć też, że relacja *MAX* jest mniej optymistyczna niż operator sumy algebraicznej. Nawiasem mówiąc, spośród innych operatorów *s*-normy, operator *MAX* w ujęciu kryterium decyzyjnego jest operatorem najmniej optymistycznym. Nawet niewielkie, częściowe spełnienie postulatu przynależności złoża do zbioru złóż o zasobach dużych znacząco podwyższa wartość sumy algebraicznej.

### Podsumowanie

Umiejętność precyzyjnego opisu rzeczywistości jest zadaniem skomplikowanym, a w działalności geologiczno-górnictwej ma ona szczególne znaczenie. Wszędzie tam, gdzie zachodzi konieczność opisu nieprecyzyjnych wielkości w sposób deskryptywny, wykorzystanie narzędzi zbiorów rozmytych wydaje się zasadne i ułatwia charakterystykę obiektu. W artykule zademonstrowano wybrane aspekty zastosowania logiki rozmytej w opisie bazy zasobowej złóż kopalin metalicznych w Polsce. Zasygnalizowano użyteczność podstawowych operatorów sumy logicznej oraz iloczynu logicznego zbiorów rozmytych, wskazując jednocześnie na występujące niekiedy mankamenty ich aplikacji. W miejsce zgłaszanych wątpliwości podstawowych operatorów możliwe jest zapewne zastosowanie operatorów kompensacyjnych, które łączą operator *I* w mniejszym lub większym stopniu z operatorem *LUB* (Zimmermann i Zysno 1980).

Proponowane przybliżenia parametrów zasobowych i jakościowych złoża za pomocą funkcji przynależności mogą być dyskusyjne, niemniej samo wnioskowanie oparte na logice rozmytej wydaje się być użyteczne. Warto dodać, że zarówno rozmyta aproksymacja parametrów złoża, jak i zarysowana koncepcja wykorzystania operatorów logicznych jest tylko krokiem wstępnym do konstrukcji docelowego, rozmytego modelu decyzyjnego.

Artykuł przygotowany w ramach badań statutowych AGH nr 11.11.140.626.

### *Literatura*

- Łachwa, A. 2001. *Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów, reguł i decyzji*. Warszawa: Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT.
- Szufflicki i in. 2016 – Szufflicki, M., Malon, A. i Tymiński M. (red.) 2016. *Bilans zasobów złóż kopalni w Polsce, stan na 31 XII 2015 r.* Praca zbiorowa, Warszawa: PIG-PIB.
- Zadeh, L.A. 1965, Fuzzy Sets. *Information and Control* vol. 8, s. 338–353.
- Zadeh, L.A. 1996. Fuzzy sets and information granularity. [W:] *Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory*, Klir G.J., Yuan B. eds, Vol. 6: Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems. Selected Papers by Lotfi A. Zadeh. Singapore, s. 433–448.
- Zimmermann, H.J. i Zysno, P. 1980. Latent connectives in human decision making. *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 4(1), s. 37–51.